

Nama : Mohammad Febryan Khamim
 NRP : 5002221072
 Kelas : Matematika 2(44)

DL : Jumat, 2 Juni 2023

1. Tunjukkan barisan berikut adalah monoton sempurna dan klasifikasikan sebagai barisan naik atau turun dari :	$U_n \geq U_{n+1}$
a. $\left\{ \frac{2^n}{1+2^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$	$\frac{\ln(n+2)}{n+2} \geq \frac{\ln(n+3)}{n+3}$
Coba uji dengan n bil. bulat.	$\frac{n+3}{n+2} \geq \frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)}$
$n=1 \rightarrow \frac{2}{3}$ $n=4 \rightarrow \frac{16}{17}$	* Ketika dimasukkan nilai $n \geq 1$ akan selalu terbukti hal tersebut. Jadi, barisan $\left\{ \frac{\ln(n+2)}{n+2} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ monoton sempurna dan merupakan barisan naik
$n=2 \rightarrow \frac{4}{5}$ $n=5 \rightarrow \frac{32}{33}$	
$n=3 \rightarrow \frac{8}{9}$ $n=6 \rightarrow \frac{64}{65}$	
dari contoh di atas, terbukti bahwa barisan tersebut monoton naik. Akan tetapi, mari coba buktikan dengan contoh yang lebih general.	2). Tunjukkan bahwa :
$U_n \leq U_{n+1}$	a. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{3}{2}$
$\frac{2^n}{1+2^n} \leq \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$	$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$
$\frac{2^n}{1+2^n} \leq \frac{2 \cdot 2^n}{1+2^n \cdot 2}$	$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$
$1+2^n \cdot 2 \leq 2 + 2 \cdot 2^n$	$= \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$
$1 \leq 2$ (terbukti).	Untuk $k \rightarrow \infty$, maka
Jadi, terbukti bahwa barisan $\left\{ \frac{2^n}{1+2^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ adalah monoton sempurna dan merupakan barisan naik.	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{3}{2} - 0 - 0 = \frac{3}{2}$ TERBUKTI //
b. $\left\{ \frac{\ln(n+2)}{n+2} \right\}_{n=1}^{+\infty}$	b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1$
$n=1 \rightarrow \frac{\ln 3}{3} = 0,366$	* Konsep pecahan parsial
$n=2 \rightarrow \frac{\ln 4}{4} = 0,347$	$\frac{A}{k^2} + \frac{B}{(k+1)^2} = \frac{A(k+1)^2 + B(k^2)}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$
$n=3 \rightarrow \frac{\ln 5}{5} = 0,321$	$k=0 \rightarrow A = 1$ $\frac{A}{k^2} + \frac{B}{(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{k}{(k+1)^2}$
Dapat dilihat bahwa barisan tersebut merupakan barisan turun dan merupakan monoton sempurna.	$k=-1 \rightarrow B = -1$ Jadi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = 1$

•> Substitusi $k+1$ dengan k pada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$,

sehingga :

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

maka :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$= 1 \quad \text{TERBUKTI}$$

Lalu lanjut :

$$\frac{\sqrt{k} \ln k}{k^3 + 1} \leq \frac{\sqrt{k} \ln k}{k^3} \leq \frac{\ln k}{k^{5/2}} \leq \frac{k}{k^{3/2}} \cdot \frac{1}{k^{3/2}}$$

(untuk $n \rightarrow \infty$)

Karena pembanding $\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$ merupakan deret konvergen, maka $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k} \ln k}{k^3}$ merupakan deret

konvergen pula. //

3. Uji yang sesuai untuk menentukan apakah deret di bawah ini konvergen :

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 + |\cos k|}{k^3}$

Untuk membuktikan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 + |\cos k|}{k^3}$ adalah

konvergen, cukup buktikan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ adalah

konvergen, karena $\frac{|\cos k|}{k^3} < \frac{1}{k^3}$ untuk tiap

$k = 1, 2, 3, \dots, \infty$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^3} = 0$ Jadi, barisan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ konvergen

Jadi, terbukti bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 + |\cos k|}{k^3}$ merupakan

Deret Konvergen //

b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k} \cdot \ln k}{k^3 + 1}$

► Uji Rasio

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k+1} \ln(k+1) \cdot k^3 + 1}{(k+1)^3 + 1} \cdot \frac{k^3 + 1}{\sqrt{k} \ln k}$$

$$\rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^3 + 1}{(k+1)^3 + 1} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k+1} \ln(k+1)}{\sqrt{k} \ln k}$$

Dalil L'Hopital

$$= 1 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k+1} \ln(k+1)}{\sqrt{k} \ln k} = 1 \cdot 1 = 1$$

Karena $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, maka deret tersebut

kemungkinan konvergen atau divergen (belum dapat disimpulkan).

4). Gunakan sebarang metode untuk mendapatkan empat suku pertama tak nol dari Deret Maclaurin dari fungsi yang diberikan :

a. $x \ln(1-x^2)$

Gunakan deret geometri $\left[\frac{a}{1-r}\right]$, dengan $a = 1$ dan $r = x^2$, sehingga $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$

► Kalikan kedua ruas dengan x

$$\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$\int \frac{x}{1-x^2} dx = \int (x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots) dx, \quad -1 < x < 1$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C = \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^4 + \frac{1}{5} x^6 + \dots \right] + C, \quad -1 < x < 1$$

Substitusi $x = 0$, maka $C = 0$

$$\ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{5} x^4 - \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$x \ln(1-x^2) = -x^3 - \frac{2}{3} x^4 - \frac{1}{2} x^5 - \frac{2}{5} x^6 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

b. $\frac{\ln(1+x)}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} \cdot \ln(1+x), \quad -1 < x < 1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{\ln(1+x)}{1-x^2} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots), \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{\ln(1+x)}{1-x^2} = x + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \left(x^3 + \frac{x^3}{3}\right) + \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{4}\right) + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{\ln(1+x)}{1-x^2} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \dots$$